Dr. Anita Dorfmayr, Universität Wien

Unterwegs mit Mathematik

Graphentheorie im Verkehrswesen

Ein zentrales Ziel des Mathematikunterrichts besteht darin, Schülerinnen und Schülern die Anwendbarkeit der Mathematik vor Augen zu führen. Im vorliegenden Beitrag werden zwei Beispiele aus dem Verkehrswesen gezeigt, die sich leicht in den Unterricht integrieren lassen:

- **Routenplaner:**
  Wie komme ich am schnellsten von Ort A nach Ort B? Ist der schnellste Weg immer auch der kürzeste?
- **Steuerung von Ampelanlagen:**
  An einer Kreuzung wird eine neue Ampelanlage errichtet. Welche Verkehrsströme sollen gleichzeitig frei geschaltet sein? In welcher Reihenfolge sollen Grünphasen hintereinander geschaltet werden?

Beide Probleme sind mit Methoden der Graphentheorie zu lösen. Die Graphentheorie wird zwar im derzeit gültigen Lehrplan der AHS nicht explizit genannt. Das Modellieren mit Graphen setzt jedoch wenig an mathematischen Kenntnissen voraus und kann daher schon recht früh und ohne zeitintensive Vorbereitung im Unterricht trainiert werden.

Im vorliegenden Aufsatz werden neben den mathematischen Methoden auch konkrete Unterrichtsvorschläge und -erfahrungen präsentiert, sowie eine Arbeit einer Schülerin vorgestellt. Beide Themen stellen das Modellieren und Interpretieren in den Vordergrund. Mathematik ist eben mehr als Rechnen.

1. Mathematische Grundlagen – Graphentheorie

Ein *Graph* besteht aus einer Menge von *Knoten* und einer Menge von *Kanten*, die jeweils zwei Knoten miteinander verbinden. Wird zusätzlich jeder Kante des Graphen eine Zahl zugeordnet, sprechen wie von einem *bewerteten Graphen*. Die einer Kante zugeordnete Zahl heißt *Bewertung* dieser Kante.

Abbildung 1 zeigt einen bewerteten Graphen mit fünf Knoten und vier Kanten

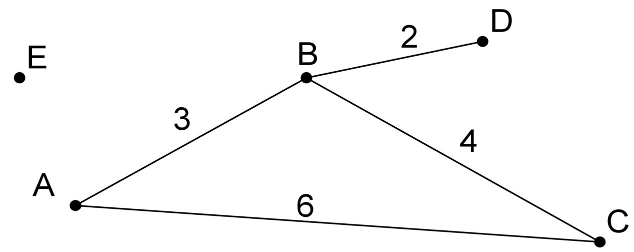


Abbildung 1: Bewerteter Graph

Ein *Weg* in einem Graphen ist eine endliche Folge von paarweise verschiedenen Knoten so, dass je zwei aufeinander folgende Knoten durch eine Kante verbunden sind. In einem bewerteten Graphen ist die *Länge* eines Weges die Summe der Bewertungen der Kanten des Weges (das sind die Kanten, die zwei aufeinander folgende Knoten verbinden). So hat zum Beispiel der Weg A-C-B-D im Graphen aus Abbildung 1 die Länge 6+4+2=12.

Ein *Teilgraph* eines Graphen G ist ein Graph,dessen Knoten- und Kantenmengen Teilmengen der Knoten- und Kantenmengen von G sind. Ist in einem Teilgraphen jeder Knoten mit jedem anderen durch eine Kante verbunden, so nennen wir ihn *vollständig*. In Abbildung 2 ist G_1 ein Teilgraph, der nicht vollständig ist, und G_2 ein vollständiger Teilgraph des Graphen G.

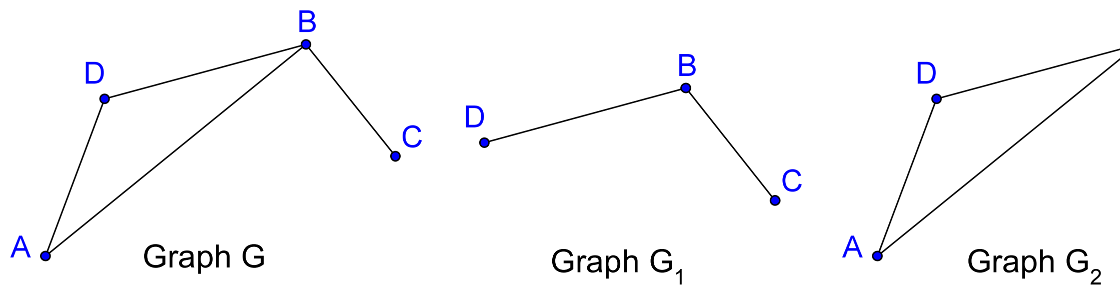


Abbildung 2: Graph und Teilgraphen

Mit Hilfe von Graphen können zahlreiche Probleme modelliert werden. Anwendung findet dieses Teilgebiet der Mathematik im Bereich der Netzplantechnik, bei der Projektplanung, bei algorithmischen Fragestellungen in der Informatik oder auch, wie im folgenden gezeigt wird, im Verkehrswesen.

Für weitere Informationen zu den mathematischen Grundlagen siehe [6. Krumke-Noltemeier] und [7. Hachenberger].

2. Routenplaner

2.1. Problemstellung

Typische Fragestellungen, die ein Routenplaner beantworten soll, sind die folgenden:

- Wie komme ich am schnellsten von Ort A nach Ort B?
- Ist der schnellste Weg auch der kürzeste?

Für die Lösung der Problemstellung gehen wir davon aus, dass

- eine geeignete Straßenkarte mit gegebenem Maßstab (eventuell online) vorliegt.
- die Art des verwendeten Transportmittels geklärt ist und somit beispielsweise Geschwindigkeitsbeschränkungen mit einkalkuliert werden können.
- Entfernungen bzw. Fahrzeiten zwischen einzelnen Orten bekannt sind oder recherchiert werden können.

2.2. Mathematisches Modell

Das Verkehrsnetz, das den Ausgangsort mit dem Zielort verbindet, kann in Form eines bewerteten Graphen dargestellt werden. Die Knoten des Graphen sind Verkehrsknotenpunkte wie Kreuzungen oder Orte. Kanten werden genau dann gezogen, wenn eine direkte Verbindung zwischen zwei Orten besteht. Die Kanten werden dann – je nach Fragestellung – mit der Entfernung oder der Fahrzeit zwischen diesen Orten bewertet (siehe zum Beispiel Aufgabe: Frankfurt – München aus Abschnitt 2.3. und Abbildung 3).

Einfache Aufgaben können Schülerinnen und Schüler schon ohne Anleitung direkt lösen. Sie bestimmen dazu zuerst alle Wege im Graphen, die den Ausgangsort mit dem Zielort verbinden. Danach ermitteln sie die Längen aller dieser Wege, indem sie die einzelnen Kantenbewertungen addieren. Der kleinste dabei auftretende Zahl ist die Länge eines kürzesten Weges vom Ausgangs- zum Zielort. Jeder Weg mit dieser Länge – und davon kann es auch mehr als einen geben – ist ein kürzester Weg.

Bei der Aufgabe: Frankfurt – München aus Abschnitt 2.3. müssen mit dieser Methode nur drei Weglängen ermittelt und paarweise verglichen werden. Die kürzesten Wege von A nach E im Graphen aus Abbildung 3 zu bestimmen, ist etwas aufwändiger. Hier müssen sechs Wege ermittelt und ihre Längen verglichen werden (siehe Tabelle 1). Als kürzester Weg ergibt sich hier A-D-C-E mit der Länge 0,839.

Weg	**Länge**
A-D-C-E	0,839
A-D-E	0,904
A-D-C-B-E	0,908
A-B-C	0,916
A-B-C-E	1,784
A-B-C-D-E	2,072

Tabelle 1: Länge aller Wege zum Graphen aus Abbildung 3

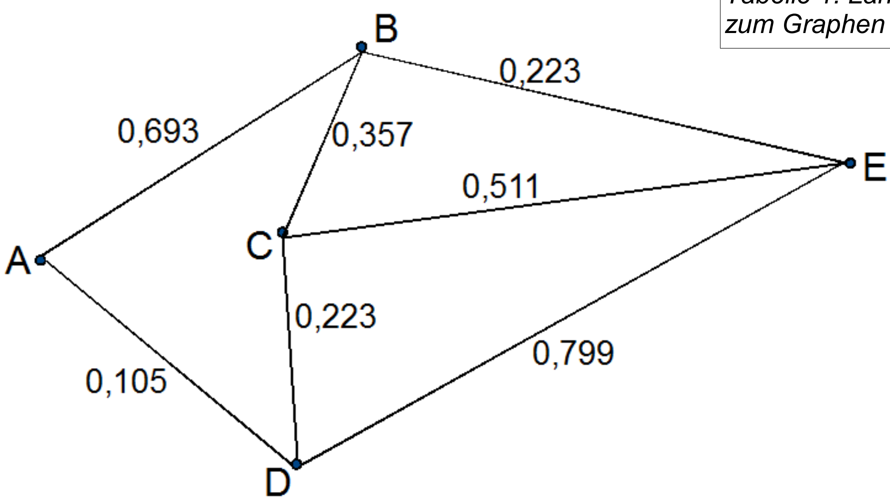


Abbildung 3: Beispiel zu Routenplaner

Bei komplexeren Verkehrsnetzen stellt sich aber bald die Frage nach einem geeigneten mathematischen Verfahren. Der **Algorithmus von Dijkstra** liefert in einem endlichen Graphen mit nicht negativer Kantenbewertung schrittweise die jeweils kürzesten Wege von einem Startknoten S zu jedem anderen Knoten des Graphen. Zuerst wird jener Knoten ermittelt, der S am nächsten liegt, dann der zweitnächste, usw. Für Details siehe [6. Krumke-Noltemeier].

Für die Schule kann die Idee des Algorithmus von Dijkstra gegebenenfalls in stark vereinfachter Form direkt am Graphen nachvollzogen werden. Auf genaue Beweise kann dabei zu Gunsten des intuitiven Verständnisses verzichtet werden.
Im Graphen werden dazu sukzessive kürzeste Wege gesucht. In jedem Schritt werden zuerst alle Weglängen verglichen, die sich aus der Verlängerung der schon bekannten kürzesten Wege um eine weitere (strichliert eingetragene) Kante ergeben. Aus all diesen untersuchten Wegen wird ein kürzester Weg ausgewählt. Jene (bisher strichlierte) Kante, die auf diesem Weg liegt, wird fett nachgezogen. Das ist dann ein kürzester Weg vom Startknoten zum neuen Knoten auf der bisher strichlierten Linie. So ergibt sich zum Schluss vom Startknoten zu jedem anderen Knoten genau ein fett eingezeichneter Weg. Natürlich kann es auch mehrere (gleich lange) kürzeste Wege vom Startknoten zu einem Knoten des Graphen geben, mit diesem Algorithmus wird aber nur einer davon ermittelt.

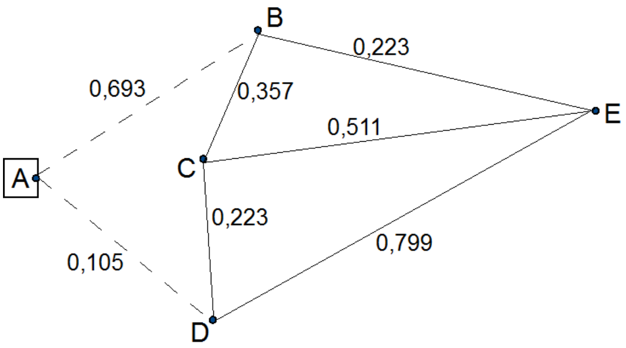
Aufgabe: Frankfurt – München aus Abschnitt 2.3. oder die Aufgabe zu Abbildung 3 mit Hilfe des Algorithmus von Dijkstra zu lösen, ist wie mit Kanonen auf Spatzen zu schießen. Für komplexere Probleme wie etwa die Aufgabe: Südbahnhof – Volksoper aus Abschnitt 2.3, ist diese Lösungsmethode aber durchaus zweckmäßig. Sie soll daher am Beispiel zu Abbildung 3 demonstriert werden:

Schritt 1:

Welcher Knoten liegt am nächsten beim Startknoten A?

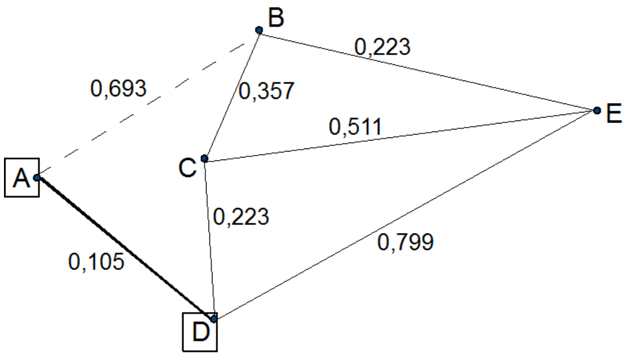
Mögliche Wege:

A-B Länge: 0,693
A-D Länge: **0,105**



D liegt am nächsten am Knoten A. Alle anderen Knoten sind sicher weiter entfernt, da mindestens eine weitere Kante am Weg zu ihnen nötig wäre.

Kürzester Weg von A nach D:
A-D Länge: 0,105

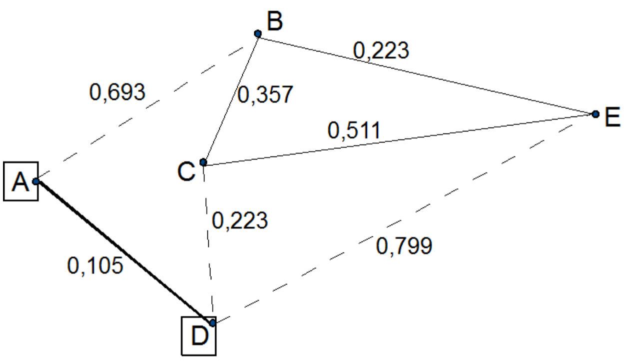


Schritt 2:

Welcher Knoten liegt am zweitnächsten beim Knoten A?

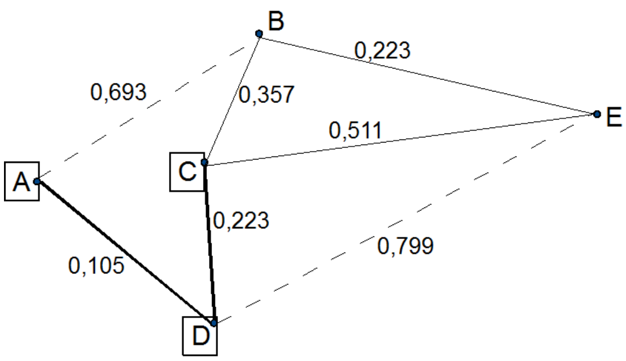
Mögliche Wege:

A-B Länge: 0,693
A-D-C Länge: 0,105+0,223=**0,328**
A-D-E Länge: 0,105+0,799=0,904



C liegt am zweitnächsten an A.

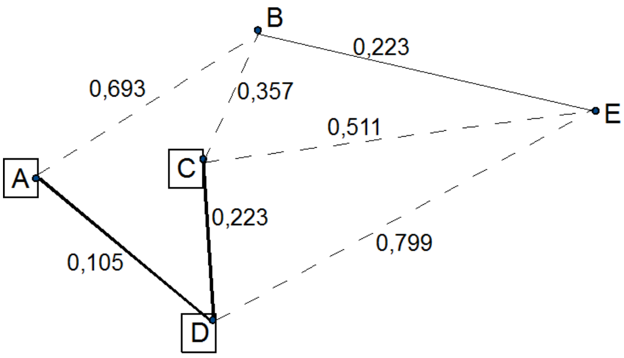
Kürzester Weg von A nach C:
A-D-C Länge: 0,328



Schritt 3: drittnächster Knoten

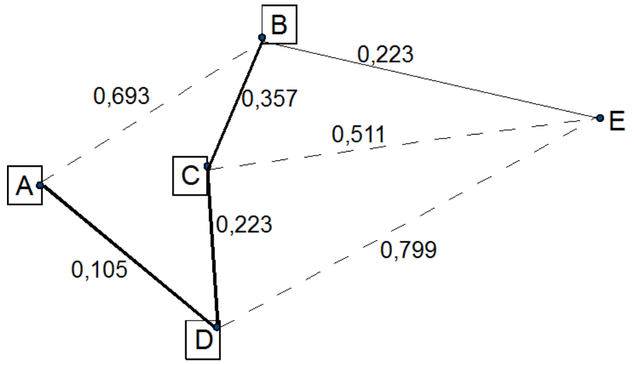
Mögliche Wege:

A-B	Länge: 0,693
A-D-C-B	Länge: 0,328+0,357=**0,685**
A-D-C-E	Länge: 0,328+0,511=0,839
A-D-E	Länge: 0,105+0,799=0,904



B liegt am drittnächsten an A.

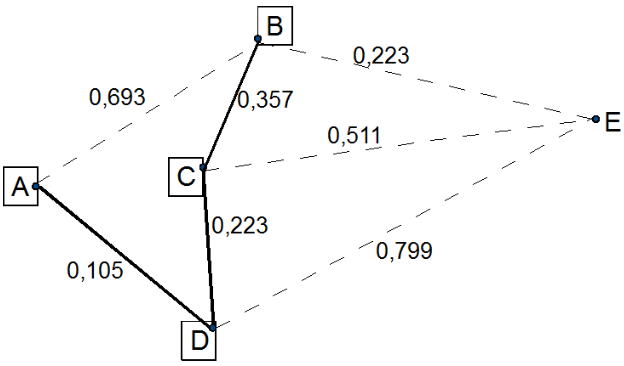
Kürzester Weg von A nach B:
A-D-C-B Länge: 0,685



Schritt 4: viertnächster Knoten

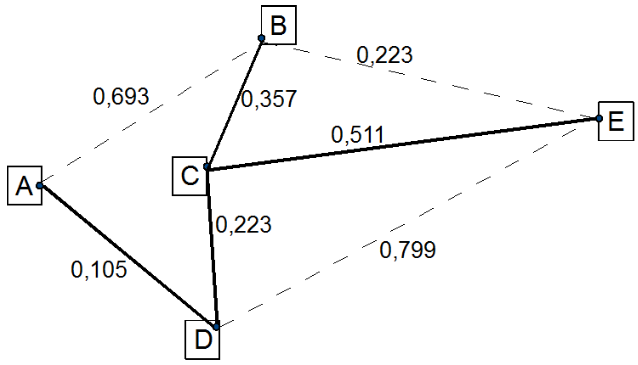
Mögliche Wege:

A-D-C-B-E	Länge: 0,685+0,223=0,908
A-D-C-E	Länge: 0,328+0,511=**0,839**
A-D-E	Länge: 0,105+0,799=0,904



E liegt am viertnächsten an A.

Kürzester Weg von A nach E:
A-D-C-E Länge: 0,839



In der Praxis hat sich die Verwendung verschiedener Farben (zB. Blau für untersuchte und Rot für kürzeste Wege) bewährt. Eine farbige Darstellung finden Sie bei [2. Dorfmayr].

2.3. Aufgaben für den Unterricht

Das Thema Routenplaner eignet sich für den Einsatz im regulären Unterricht, aber auch für kurze Projekte und im Rahmen der Begabtenförderung. In diesem Abschnitt werden zwei Arbeitsblätter und deren Einsatz im Unterricht besprochen.

Bei der *Aufgabe Frankfurt – München* stehen die Klärung der Problemstellung und die Modellierung im Vordergrund. Die Aufgabe ist intuitiv durch Probieren zu lösen und setzt

Aufgabe: Frankfurt – München

Wo verläuft die kürzeste Route von Frankfurt nach München? Wie lang ist sie?

Zusatz: Die Strecke wird mit dem Auto zurückgelegt, dabei können durchwegs Autobahnen verwendet werden. Wie lange wird die Fahrt in etwa dauern?

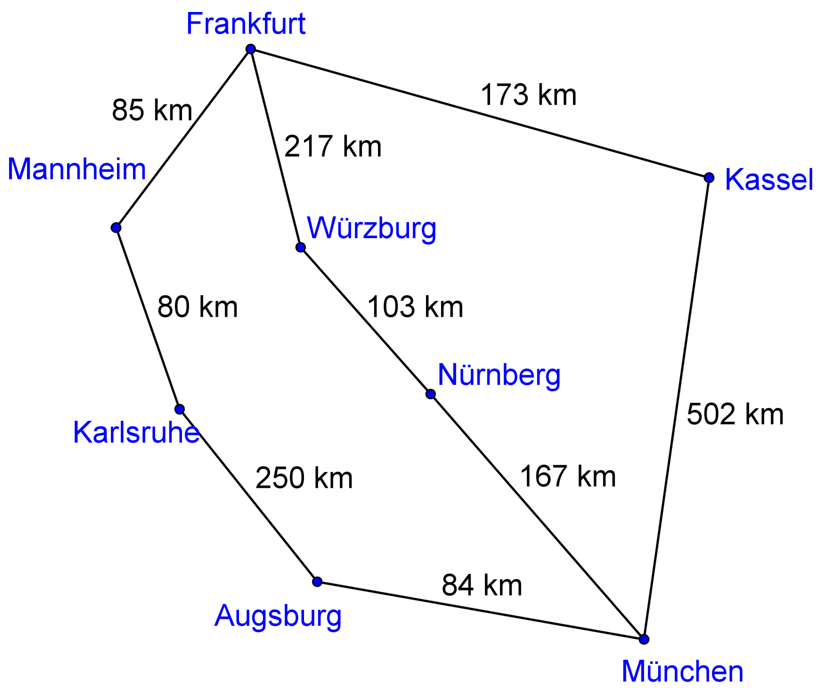


Abbildung 4: Deutschland – bewerteter Entfernungs-Graph

nur wenige mathematische Fertigkeiten voraus. Sie wurde in einer 4. Klasse AHS, in einer 6. Klasse AHS, sowie im Rahmen der Begabtenförderung bei der Hochbegabtenakademie am Semmering erfolgreich eingesetzt.
Fragen, die dabei diskutiert werden können:

- Gegebene Daten:
  Woher kommen die Daten im gegebenen Graphen? Was genau bedeuten die Zahlen? Wie genau sind die Daten? Ist eine höhere Genauigkeit anzustreben?
- Fahrzeit:
  Wie kann die Fahrzeit berechnet bzw. geschätzt werden? Wie genau kann sie angegeben werden? Reicht es, die Fahrzeiten für die einzelnen Strecken zu addieren oder müssen auch Pausen berücksichtigt werden?
- Vergleich:
  Ist der kürzeste Weg immer auch der schnellste?
- Quellen:
  Woher können ähnliche Daten beispielsweise für Österreich ermittelt werden? Kann eine Straßenkarte aus dem Geografie-Atlas helfen?

Im Anschluss an diese Aufgabe kann der Dijkstra-Algorithmus erarbeitet werden. Ein Vergleich mit der durch Probieren gefundenen Lösung schafft Vertrauen darin, dass der Algorithmus funktioniert.

Aufgabe: Südbahnhof – Volksoper

Eine kleine Reisegruppe kommt um 18 Uhr am Südbahnhof (Nähe Südtiroler Platz) in Wien an und möchte eine Vorstellung in der Volksoper besuchen. Wie kommt die Gruppe mit den öffentlichen Verkehrsmitteln am schnellsten vom Südbahnhof zur Volksoper? Recherchiere im Internet, wie lange die U-Bahnen zwischen den einzelnen Stationen fahren und erstelle ein graphentheoretisches Modell!

Berechne die kürzeste Fahrzeit und die entsprechende Route zuerst ohne die Zeitverluste beim Umsteigen zu berücksichtigen! Überlege dann, wie du diese Zeitverluste ins mathematische Modell einbauen könntest! Erstelle ein neues, verbessertes Modell! Ist in diesem Modell die selbe Route optimal? Ist es sinnvoll, nur die U-Bahnen zu benützen oder sollte die Gruppe auch die Schnellbahn verwenden?

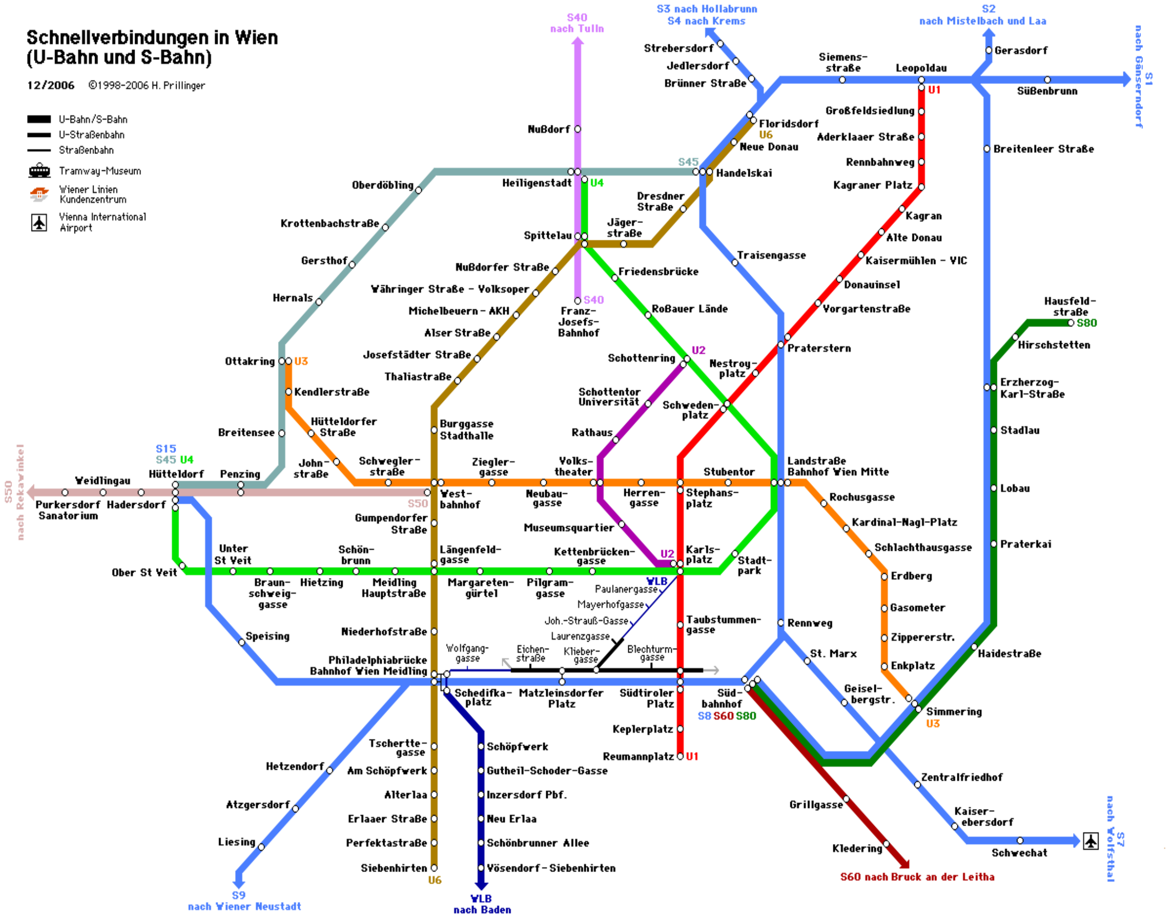


Abbildung 5: U-Bahn- und S-Bahn-Netz Wien Stadt

Quelle: http://www.vor.at [11.06.2007]

Die Aufgabe Südbahnhof – Volksoper (Abbildung 5) zeichnet sich durch höhere Komplexität aus. Sie wurde in einer 6. Klasse AHS und im Rahmen der Begabten-förderung mehrfach erfolgreich eingesetzt. Die Schülerinnen und Schüler sollten für diese Aufgabe den Algorithmus von Dijkstra schon anwenden können. Auch Erfahrungen beim Recherchieren im Internet sind von Vorteil, da für die Modellierung auch die Fahrzeiten

benötigt werden. Dabei muss auf die passende Uhrzeit geachtet werden, da die Fahr- und Wartezeiten im Verlauf eines Tages variieren.
Die Schülerinnen und Schüler sind gefordert, neben den kürzesten bzw. schnellsten Wegen auch die Zeitverluste beim Umsteigen ins Modell zu integrieren. Dabei sollen verschiedene Ideen gefunden und realisiert werden. Am häufigsten verwendeten die Schülerinnen und Schüler folgende Strategien:

- Die Fahrzeiten auf allen Teilstrecken wurden um 3 bis 5 Minuten verlängert, sodass die Wartezeit in die Fahrzeit integriert wurde.
- Im Graphen wurden für jede U-Bahn-Stationen zwei Knoten eingefügt. Die Kante, die beispielsweise die Knoten Karlsplatz-1 und Karlsplatz-2 verbindet, wurde dann mit der am Karlsplatz zu erwarteten Wartezeit bewertet.

Diese Aufgabe zeichnet sich durch die vielfältigen Möglichkeiten der Modellierung aus. Die Schülerinnen und Schüler zeigten stets großes Interesse am Vergleich verschiedener Modelle und diskutierten darüber, welches Modell das beste sei.

3. Regelung von Ampelkreuzungen

3.1. Problemstellung

An einer Kreuzung soll eine Ampelanlage installiert werden. Typische Fragestellungen, die dazu im Vorfeld geklärt werden müssen, sind die folgenden:

- Welche Verkehrsströme können und sollen gemeinsam fließen?
- Welche Grünphasen sollen aufeinander folgen?
- Wie lang soll eine Grünphase dauern?

Eine Ampelanlage muss nach folgenden **Kriterien** gesteuert werden:

A) Jeder Verkehrsstrom, der keinen der freigeschalteten Ströme behindert, hat auch selbst Grün. – Jeder der fahren kann, soll auch fahren dürfen.
B) Jeder Verkehrsstrom hat im Laufe eines Zyklus mindestens einmal Grün.
C) Grünphasen dauern für jeden Verkehrsstrom möglichst lang. Rot- und Grünphasen wechseln einander für einen Verkehrsstrom möglichst selten ab, d.h. Stop and Go-Verkehr soll vermieden werden.

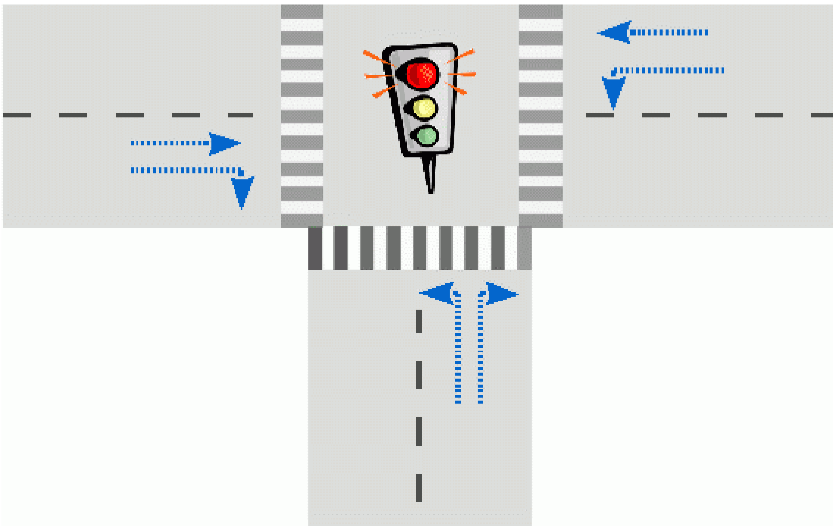


Abbildung 6: Kreuzung - Skizze

Für die Lösung der Problemstellung gehen wir davon aus, dass

- eine Skizze der Kreuzung wie in Abbildung 6 vorliegt.
- der Verlauf der Verkehrsströme bekannt ist.
- die Vorrangregeln nach der gültigen Straßenverkehrsordnung eingehalten werden.

3.2. Mathematisches Modell

Das im folgenden vorgestellte mathematische Modell eignet sich dazu, die ersten beiden der oben genannten Fragestellungen zu klären. Die Frage nach der optimalen Dauer der Grünphasen kann mit Hilfe dieser Methode nicht geklärt werden.

Wir beschreiben die Kreuzung und die Verkehrsströme durch einen Graphen, den wir *Verträglichkeitsgraph* nennen. In diesem Graphen werden Grünphasen in Form von vollständigen Teilgraphen repräsentiert. Schrittweise gehen wir bei der Modellierung und Lösung des Problems wie folgt vor:

1. Nummerierung der Verkehrsströme
2. Festlegen der Verträglichkeit – Verträglichkeitsgraph
3. Ermitteln möglicher Grünphasen
4. Auswahl und Abfolge der Grünphasen

Erklärt werden soll die Modellierung und Lösung der Fragestellung an Hand der Kreuzung aus Abbildung 6.

Schritt 1: Nummerierung der Verkehrsströme

Die Reihenfolge der Nummerierung kann frei gewählt werden. Eine Möglichkeit zeigt Abbildung 7.

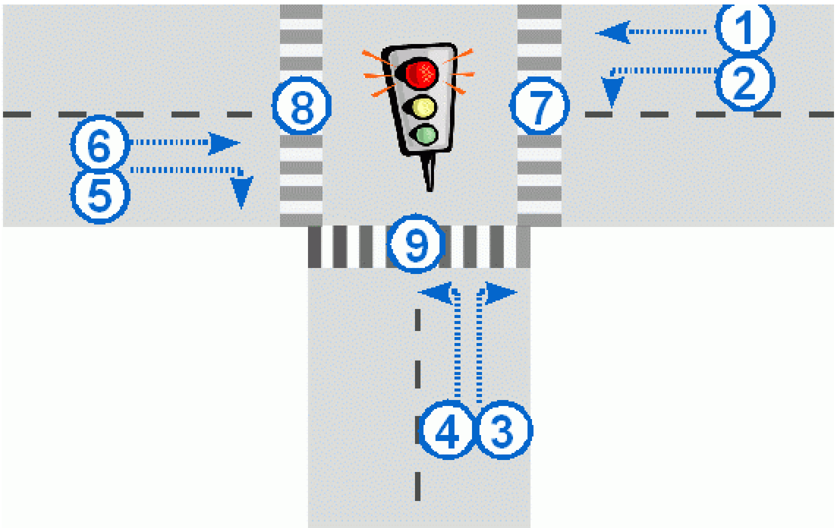


Abbildung 7: Kreuzung mit nummerierten Verkehrsströmen

Schritt 2: Festlegen der Verträglichkeit – **Verträglichkeitsgraph**

Zwei Verkehrsströme heißen **verträglich**, wenn sie gleichzeitig fließen dürfen. Die Verträglichkeit der Verkehrsströme kann übersichtlich in einem Verträglichkeitsgraphen dargestellt werden:

- Jeder Knoten steht für einen Verkehrsstrom der zu modellierenden Kreuzung. Wir bezeichnen den Knoten, der den Verkehrsstrom i beschreibt, auch wieder mit i.
- Zwei Knoten werden genau dann durch eine nicht bewertete Kante verbunden, wenn sie miteinander verträglich sind.

Die Verträglichkeit von Verkehrsströmen ist von Verkehrsplanern festzulegen und hängt von verschiedenen Faktoren wie der gültigen Straßenverkehrsordnung, der Führung des Verkehrsstromes, aber auch vom Verkehrsaufkommen ab. Oft ist die Entscheidung nicht eindeutig zu treffen.

Zum obigen Beispiel (Abbildung 7):

- Nehmen wir an, Verkehrsstrom 4 zeichnet sich durch hohes Verkehrsaufkommen aus. Um große Wartezeiten zu vermeiden, sollte man ihn in diesem Fall als nicht verträglich mit den Fußgängern auf Verkehrsstrom 8 festlegen.
- Verkehrsstrom 3 werden wir gleichzeitig mit den Verkehrsströmen 6 und 7 fließen lassen. Dies ist vor allem dann sinnvoll, wenn das Verkehrsaufkommen auf den betroffenen Verkehrsströmen eher gering ist.
- Diese und alle weiteren Verträglichkeiten können dem Verträglichkeitsgraphen aus Abbildung 8 entnommen werden.

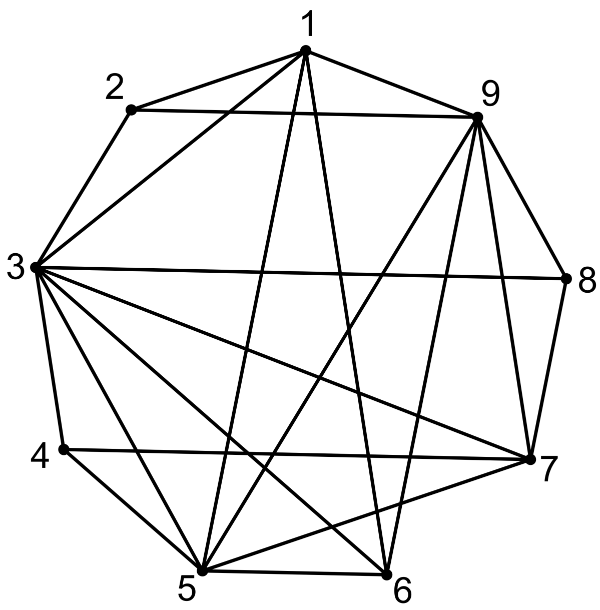


Abbildung 8: Möglicher Verträglichkeitsgraph

Schritt 3: Ermitteln möglicher **Grünphasen**

Jede **Grünphase** muss aus möglichst vielen miteinander verträglichen Verkehrsströmen bestehen (Kriterium A). Im Verträglichkeitsgraphen muss daher jeder Verkehrsstrom aus der Grünphase mit jedem anderen Verkehrsstrom der Grünphase durch eine Kante verbunden sein. Jeder maximale# vollständige Teilgraph des Verträglichkeitsgraphen stellt somit eine mögliche Grünphase dar. Diese sollen nun ermittelt werden.

Mögliche Grünphasen findet man in einfachen Verträglichkeitsgraphen recht schnell ohne jeglichen Algorithmus. Dazu muss nur bei jedem Teilgraphen überprüft werden, ob er vollständig und maximal ist.

Beispiel:
Der Graph mit den Knoten 1, 3 und 5 aus Abbildung 8 ist vollständig, aber nicht maximal. Er kann um den Knoten 6 zu einem weiteren vollständigen Teilgraphen erweitert werden. Dieser neue Graph ist vollständig und maximal in dem Sinne, dass kein weiterer Knoten ergänzt werden kann, ohne auf die Vollständigkeit des Graphen zu verzichten.
Als mögliche Grünphase erhalten wir daher: 1, 3, 5, 6

Im Beispiel ergeben sich folgende mögliche Grünphasen:

1, 2, 3	3, 4, 5, 7	5, 7, 9
1, 2, 9	3, 7, 8	
1, 3, 5, 6		7, 8, 9
1, 5, 6, 9		

Für einfache Aufgaben wie das hier vorgestellte, reicht es, mögliche Grünphasen „durch genaues Hinsehen“ zu ermitteln. Je höher die Zahl der

Ein vollständiger Teilgraph eines Graphen ist genau dann maximal, wenn er nicht Teilgraph eines anderen vollständigen Teilgraphen ist.

Verkehrsströme ist, desto komplexer wird die Suche nach maximalen vollständigen Teilgraphen aber.

Schritt 4: Auswahl und Abfolge der Grünphasen

Für die konkrete Ampelsteuerung können alle gefundenen Grünphasen verwendet werden. Üblicherweise wird jedoch eine Auswahl getroffen, um die Komplexität der Regelung möglichst gering zu halten. Bei der Auswahl ist darauf zu achten, dass jeder Verkehrsstrom mindestens einmal Grün hat (Kriterium B).

Im Beispiel muss die Phase 3, 4, 5, 7 sicher in der Ampelsteuerung vorkommen, da dies die einzige Grünphase mit Verkehrsstrom 4 ist. Eine mögliche Ampelsteuerung besteht aus folgenden Phasen:
3, 4, 5, 7 1, 2, 3 1, 5, 6, 9 3, 7, 8

Kriterium C verlangt, dass einzelne Grünphasen möglichst lang sein sollen. Die Zeitdauer einzelner Phasen wird zwar im vorgestellten Modell nicht berücksichtigt, doch eine optimale Abfolge der ausgewählten Grünphasen kann trotzdem gewährleistet werden: Wenn ein Verkehrsstrom in mehreren Phasen vorkommt, sollen diese Phasen hintereinander geschaltet werden. In unserem Beispiel ergibt sich damit als eine mögliche, den Kritierien entsprechende Ampelsteuerung folgender Zyklus:

1. Phase: 3, 7, 8
2. Phase: 3, 4, 5, 7
3. Phase: 1, 5, 6, 9
4. Phase: 1, 2, 3

Kriterium C ist erfüllt, denn die Verkehrsströme 1, 5 und 7 kommen in aufeinander folgenden Grünphasen vor und können damit zweimal hintereinander (ohne Pause) auf Grün geschaltet werden. Verkehrsstrom 3 kommt in der ersten, zweiten und vierten Grünphase vor. Da die Phasen zyklisch abwechseln, hat dieser Verkehrsstrom sogar drei Phasen hindurch ohne Pause Grün.

3.3. Anwendung im Unterricht – Arbeit einer Schülerin

Die Anwendung der Graphentheorie für die Modellierung von Ampelkreuzungen wurde im Unterricht mehrmals erfolgreich eingesetzt: im Rahmen eines Projektes in einer 4. Klasse, in einem Labor Mathematik-Physik-Informatik einer 6. Klasse, ihm Rahmen der Begabtenförderung bei der Hochbegabtenakademie am Semmering und bei Mathe-Fans an die Uni für die 4. Klasse an der Universität Wien.
Die Schülerinnen und Schüler erarbeiteten dabei die Problemstellung, Modellierung und die mathematische Lösung der Aufgabe jeweils selbstständig in Kleingruppen an Hand eines Rumpfskriptums (siehe [3. Dorfmayr]). Die Hilfe der Lehrperson war in allen Gruppen und in allen Schulstufen vor allem bei der Suche nach Grünphasen nötig.

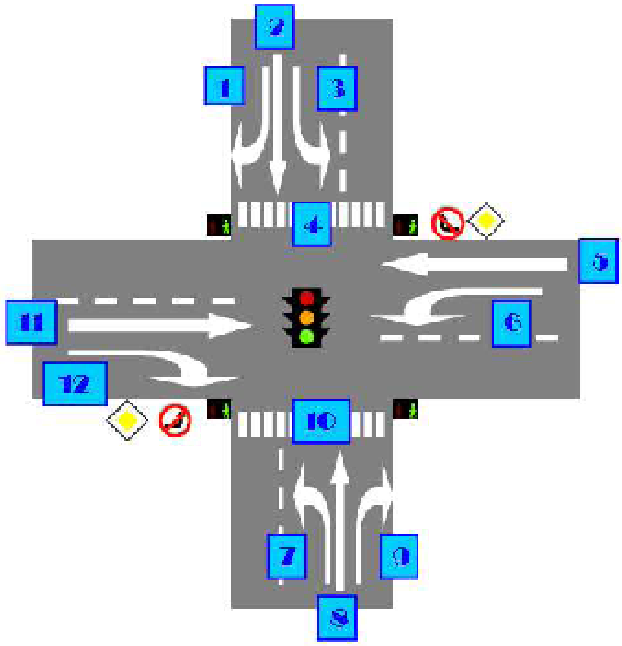
Im Anschluss an die Erarbeitung des mathematischen Modells hatte jede Gruppe stets die Aufgabe, eine eigene Kreuzung mit mindestens 13 Knoten analog zu modellieren und eine Ampelregelung zu erarbeiten. Die Kreuzung konnte selbst erfunden werden, es konnte aber auch eine Kreuzung aus der Umgebung gewählt werden. Eine Skizze der Kreuzung, die Entwicklung des mathematischen Modells sowie die gefundene Lösung waren ausführlich am Computer zu dokumentieren.

Es zeigte sich, dass die Schülerinnen und Schüler die wachsende Komplexität der Aufgabe anfangs stark unterschätzten. Fast alle Gruppen versuchten sich erst an Kreuzungen mit 15 oder sogar mehr Knoten, scheiterten dann allerdings – nach viel Mühe beim Erstellen des Verträglichkeitsgraphen – bei der Suche nach den Grünphasen. Fast alle wählten dann doch eine weniger komplexe Kreuzung. Die Schülerinnen und Schüler konnten so selbst erleben, was wir unter *hoher Komplexität* verstehen: Komplexität bedeutet, warum man nach Algorithmen suchen muss, die ein Problem in relativ kurzer Zeit lösen und warum die Durchführung solcher Algorithmen in der Praxis am Computer erfolgen muss.

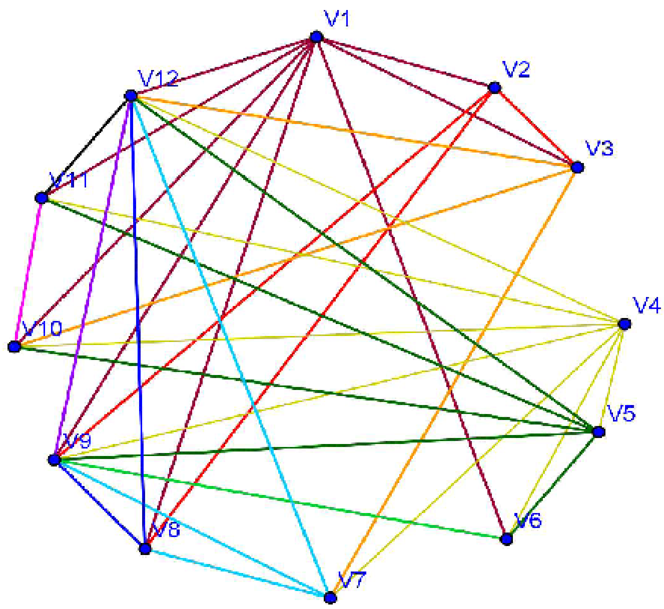
Ein weiterer wichtiger Lernerfolg im Rahmen dieses Unterrichtsprojektes bestand darin, dass trotz gegebener Kreuzung verschiedene Modelle – genauer gesagt verschiedene Verträglichkeitsgraphen – möglich und sinnvoll sein können. Und sogar bei gleichen Verträglichkeitsgraphen ist die Lösung der Aufgabe nicht eindeutig gegeben, da jede Gruppe andere Grünphasen auswählen und diese dann individuell in eine geeignete Reihenfolge bringen kann. Eine sehr schöne offene Aufgabenstellung also, bei der das Argumentieren und Interpretieren im Vordergrund steht.

Eine der besten Arbeiten stammt von Katharina, einer sehr guten Schülerin einer 6. Klasse Realgymnasium. Ein Auszug wird im folgenden dargestellt.

Nummerierung der Verkehrsströme:



Verträglichkeitsgraph:



Katharina dokumentiert ihre Arbeit sehr detailliert und entscheidet sich schließlich für folgende Ampelsteuerung:

1. Phase:	1, 2, 8, 9
2. Phase:	4, 5, 6, 9
3. Phase:	4, 5, 10, 11
4. Phase:	3, 7, 12

4. Schlussbemerkung

Graphentheorie wird im fachlichen Teil des Lehrplans der AHS nicht explizit genannt. Zahlreiche Kompetenzen, die unsere Schülerinnen und Schüler laut dem allgemeinen Teil des Lehrplans erreichen sollen, können aber gerade durch die hier vorgestellten Anwendungsaufgaben unterstützt werden:

- Recherchieren – zum Beispiel beim Thema Routenplaner
- Modellbilden, Modelle analysieren und verbessern
- Interpretieren von Ergebnissen
- Mehrdeutigkeit bei Ergebnissen – wie am Beispiel der optimalen Ampelsteuerung

Darüber hinaus eignen sich die vorgestellten Arbeitsaufträge für eigenverantwortliches Arbeiten in Gruppen. Die Themen lassen sich beim leistungsdifferenzierten Arbeiten einsetzen – schwache Schülerinnen und Schüler wählen von sich aus weniger komplexe Kreuzungen als sehr begabte. Dies wird erst dadurch möglich, dass nur geringe mathematische Vorkenntnisse erforderlich sind. Die Herausforderung für die Schülerinnen und Schüler stellt vor allem die Komplexität der auftretenden Graphen dar.

Die Themen eignen sich für den Einsatz im Regelunterricht, in Projekten, aber auch im Bereich der Begabtenförderung. Sogar eine Weiterführung in den Bereich der Informatik scheint möglich, wenn man dazu übergeht, die Algorithmen zu programmieren.

Beide Themen haben starken Bezug zum Alltag der Schülerinnen und Schüler. Was nicht zu vergessen ist: Es handelt sich hier um „echte“ Anwendungsaufgaben und Methoden, die in der Praxis genau so verwendet werden können.

Die Erfahrung zeigt, dass diese Themen für die Schülerinnen und Schüler von großem Interesse sind. Dies gilt auch für schwächere Schülerinnen und Schüler, da das Operieren im Hintergrund steht. Die erworbenen Kompetenzen bleiben über mehrere Jahre langfristig erhalten.

5. Literatur

[1.] C. Ableitinger, A. Dorfmayr: Optimieren und Modellieren – Besser geht's nicht. Unterlagen zur Sommerakademie für hochbegabte Schülerinnen und Schüler, Semmering, 2007.
[2.] A. Dorfmayr: Unterwegs mit Mathematik – Graphentheorie im Verkehrswesen. Präsentation. Online im Internet. URL: http://www.dorfmayr.org/ [Stand: 16.06.2008]
[3.] A. Dorfmayr: Ampelanlagen – Anwendung der Graphentheorie. Skriptum für Mathe-Fans an die Uni. Online im Internet. URL: http://www.dorfmayr.org/ [Stand: 01.10.2008]
[4.] D. Dorninger: Anwendungen der Mathematik (für LAK). Skriptum, TU Wien, 2004.
[5.] D. Dorninger, G. Karigl: Mathematik für Wirtschaftsinformatiker. Band 1, 2. Auflage, Springer, Wien, New York 1996.
[6.] S. Krumke, H. Noltemeier: Graphentheoretische Konzepte und Algorithmen. Teubner, Wiesbaden 2005.
[7.] D. Hachenberger: Mathematik für Informatiker. Pearson Studium, München 2005.
[8.] Wikipedia: Graph (Graphentheorie). Online im Internet. URL: http://de.wikipedia.org/wiki/Graph_(Graphentheorie) [Stand: 12.06.2008]